הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה 2 באוקטובר 2005

<u>פרטי הסטודנט:</u>

שם משפחה ..... שם פרטי .....

פקולטה ..... מספר זהות .....

אלגברה 1 מ' (104016) – בחינת מועד ב' – סמסטר אביב תשס"ה - תשובות ופתרונות

<u>הוראות לנבחן:</u>

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בדפי עזר, במחשבונים או בטלפונים.

הבחינה מורכבת משש שאלות שכל אחת מהן מחולקת למספר סעיפים.

קרא היטב את ההוראות בראש כל שאלה. בחלק מן השאלות נדרש הסבר מלא ובחלק לא.

יש לענות על השאלות בעמוד בו הן מופיעות. אפשר לכתוב על **שני** צדי הדף. מחברת הטיוטה **לא** תיבדק.

בהצלחה!

<u>לשימוש הבודקים בלבד:</u>

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
6	
סיכום	

שאלה 1 (22 נקודות). בשאלה זו יש **לנמק** כל תשובה, אחרת היא לא תתקבל. אם צריך, כתוב בשני צדי הדף.

יהי $V = R^2$, ויהיו $v_1=(x_1,y_1)$, $v_2=(x_2,y_2)$ וקטורים ב-V.

(א) הוכח שהביטוי $<v_1,v_2> = x_1x_2+2y_1y_2$ מגדיר מכפלה פנימית במרחב V.

(ב) יהי $v_1=(-3,2\sqrt{2})$. חשב את $\|v_1\|$ עם המכפלה הפנימית שהוגדרה ב-(א).

(ג) עבור v_1 מ- (ב) יהי $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$. השלם את u_1 לבסיס אורתונורמלי של V עם המכפלה הפנימית שהוגדרה ב- (א).

(ד) עבור u_1 מ- (ג) נגדיר $U=Span\{u_1\}$. רשום את הוקטור $v=(-1,3)$ כסכום $v=u+u'$ באשר $u\in U$, $u'\in U^{\perp}$ עם המכפלה הפנימית שהוגדרה ב- (א).

פתרון

(א) ליניאריות:

$$<\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2, v_3> = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)x_3+2(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)y_3 =$$
$$=\alpha_1(x_1x_3+2y_1y_3)+\alpha_2(x_2x_3+2y_2y_3)=\alpha_1<v_1,v_3>+\alpha_2<v_2,v_3>$$

קומוטטביות: $<v_1,v_2> = x_1x_2+2y_1y_2 = x_2x_1+2y_2y_1 = <v_2,v_1>$

חיוביות: $<v_1,v_1> = x_1^2+2y_1^2 \geq 0$ וברור ש- $<v_1,v_1>=0$ אם ורק אם $v_1=0$.

(ב) $\|v_1\| = \sqrt{<v_1,v_1>} = \sqrt{3^2+2(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(ג) נחפש וקטור $v_2=(x_2,y_2)$ שניצב ל- v_1. צריך להתקיים $<v_1,v_2> = -3x_2+2\cdot 2\sqrt{2}\,y_2 = 0$, ולכן אפשר לבחור $x_2=4\sqrt{2}$, $y_2=3$, כלומר $v_2=(4\sqrt{2},3)$, וקיים $\|v_2\| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2+2\cdot 3^2} = \sqrt{32+18} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

הבסיס האורתונורמלי המבוקש הוא $B=\{u_1\ ,\ u_2\}$ באשר $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=(-\frac{3}{5}\ ,\ \frac{2\sqrt{2}}{5})$, $u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5\sqrt{2}})$.

(ד) מתקיים $U^{\perp}=Span\{u_2\}$, $U=Span\{u_1\}$, ולכן $V=Span\{u_1\}\oplus Span\{u_2\}$. לכל וקטור v ב-V מתקיים $v=<v,u_1>u_1+<v,u_2>u_2$, וזהו הסכום המבוקש כלומר $u'=<v,u_2>u_2$, $u=<v,u_1>u_1$.

את החישובים המספריים המדויקים עבור הוקטורים הנתונים אנו משאירים לקורא.

שאלה 2 (20 נקודות). בשאלה זו יש לסמן את **כל** התשובות הנכונות. בכל סעיף תיתכן **יותר** מתשובה נכונה אחת.
סימון של תשובה **לא** נכונה **יוריד** נקודות.

(א) נתונות ארבע המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\3&3&5&3&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&3&0&0\end{pmatrix}$$

סמן את כל הטענות הנכונות:

|I| A ו- B דומות. II. A ו- C דומות. **|III|** A ו- D דומות.

IV. B ו- C דומות. **|V|** B ו- D דומות.

הסבר: אפשר לראות שלכל המטריצות הנתונות יש אותו פולינום אופייני $p(\lambda)=\lambda^3(\lambda-5)$, אבל המטריצה C **איננה** לכסינה, בעוד ששאר המטריצות הן לכסינות.

(ב) תהיינה W קבוצת כל המטריצות הסימטריות הממשיות מסדר 2 x 2, ו- U קבוצת כל המטריצות הממשיות מסדר 2 x 2 אשר מתחלפות בכפל עם המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

סמן את כל הטענות הנכונות:

I. הסכום של U ו- W הוא סכום ישר.

|II| $\dim(U)=2$ והמרחב $U\cap W$ נפרש על-ידי מטריצת היחידה.

III. $\dim(U)=3$ ו- $\dim(U\cap W)=2$.

|IV| $\dim(W)=3$.

V. $\dim(W)=3$, $\dim(U)=1$ והסכום $U+W$ **איננו** סכום ישר.

הסבר: אפשר לראות שמתקיים $U=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ a,b\in R\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},\ a,b,c\in R\right\}$. לכן

$\dim(W)=3$, $\dim(U)=2$, $U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix},\ a\in R\right\}$.

שאלה 3 (30 נקודות). בשאלה זו יש למלא אחר ההוראות בכל סעיף. אין צורך לרשום את דרך הפתרון.

יהי $R_3[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה 3 לכל היותר, ויהי $T: R_3[x] \to R_3[x]$ אופרטור ליניארי המוגדר על-ידי $T(ax^3+bx^2+cx+d) = (a-c)x^3+(b-d)x^2+(c-a)x+(d-b)$.

(א) רשום את המטריצה המייצגת A של האופרטור T לפי הבסיס $\{x^3, x^2, x, 1\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) חשב את המטריצה A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ג) רשום את הפולינום האופייני $p(\lambda)$ של האופרטור T.

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$$

(ד) מצא את כל הערכים העצמיים של T ואת ריבוייהם האלגבריים והגיאומטריים.

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי
0	2	2
2	2	2

(ה) מצא מטריצה P אשר מלכסנת את המטריצה A.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ו) תהי $B = (A-I)^4$. אז הערכים העצמיים של B הם: $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1 \quad \lambda_4 = 1$

(ז) האם המטריצה B לכסינה? **כן** / **לא**. סמן את התשובה הנכונה ורשום נימוק בשורה אחת.

B לכסינה כי יש לה ארבעה וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית. למעשה B = I.

(ח) מטריצה C דומה למטריצה B הנ"ל אם ורק אם $C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 4 (8 נקודות) בשאלה זו לכל סעיף יש **בדיוק** תשובה **אחת** נכונה, שאותה יש לסמן. סימון של יותר מתשובה אחת **יפסול** את הסעיף.

(א) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\\alpha&0&\beta\end{pmatrix}$ באשר α , β פרמטרים ממשיים.

אז המטריצה A היא לכסינה אם ורק אם:

I. α כלשהו, $\beta\neq 2$ ו- $\beta\neq 3$.

|II| α כלשהו ו- $\beta\neq 3$ או $\alpha=0$ ו- $\beta=3$.

III. $\alpha=0$ ו- $\beta=2$ או α כלשהו ו- $\beta\neq 2$.

IV. $\alpha=0$ ו- $\beta=2$ או $\alpha=0$ ו- $\beta=3$ או α כלשהו, $\beta\neq 2$ ו- $\beta\neq 3$.

V. $\alpha=0$, $\beta\neq 2$ ו- $\beta\neq 3$.

הסבר: הערכים העצמיים של A הם 2, 3 ו- β, ולכן אם $\beta\neq 2$ ו- $\beta\neq 3$ אז ברור ש- A לכסינה **לכל** ערך של α.

אם $\beta=2$ אז $A-2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\\alpha&0&0\end{pmatrix}$, ורואים ש- $\dim(Ker(A-2I))=2$ לכל α, כלומר ל- $\lambda=2$ יש ריבוי גיאומטרי 2 לכל α, כלומר גם כאן A מטריצה לכסינה **לכל** ערך של α.

אם לעומת זאת $\beta=3$ אז $A-3I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\\alpha&0&0\end{pmatrix}$, ורואים ש- $\dim(Ker(A-3I))=2$ רק אם $\alpha=0$,

כלומר ל- $\lambda=3$ יש ריבוי גיאומטרי 2 רק אם $\alpha=0$, כלומר A לכסינה **רק** אם $\alpha=0$.

(ב) סמן את הטענה הנכונה (זכור שיש **רק** אחת כזו):

I. כל וקטור במרחב וקטורי ממימד סופי שייך לאיזשהו בסיס של המרחב.

II. אם U ו- W שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי V, B בסיס של U ו- C בסיס של W,
אז הקבוצה $B+C=\{b+c \mid b\in B\ ,\ c\in C\}$ היא בסיס לתת-המרחב U + W.

III. אם U ו- W שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי V, B בסיס של U ו- C בסיס של W,
אז הקבוצה $B\cup C$ היא בסיס לתת-המרחב U + W.

|IV| כל זוג וקטורים בלתי תלויים ליניארית במרחב וקטורי ממימד סופי שייכים לאיזשהו בסיס של המרחב.

V. אם U, V, W הם שלושה תת-מרחבים ממימד 4 של מרחב וקטורי ממימד 6, אז $U\cap V\cap W\neq\{0\}$.

הסבר: לכל טענה מלבד טענה IV אפשר למצוא בקלות דוגמה נגדית.

שאלה 5 (10 נקודות). הוכח או הפרך כל אחת משתי הטענות הבאות. אם לדעתך הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לדעתך הטענה איננה נכונה, הראה דוגמה נגדית. אם צריך, כתוב בשני צדי הדף.

(א) יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $<u , v>$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי. אם ל- T יש וקטור עצמי v המקיים $<Tv , v> = 0$, אז T אופרטור **לא** הפיך.

פתרון.

הטענה נכונה. יהי v הוקטור העצמי הנ"ל, ויהי λ הערך העצמי המתאים לו. אז $v \neq 0$ ומתקיים:

$$<Tv , v> = <\lambda v , v> = \lambda <v , v> = \lambda \| v \|^2 = 0$$

מכיוון ש- $v \neq 0$ אז יוצא $\lambda = 0$, וזה אומר ש-T אופרטור לא הפיך.

(ב) אם A מטריצה ממשית לכסינה, אז גם המטריצה המוחלפת A^T לכסינה.

פתרון.

הטענה נכונה. אם A לכסינה אז יש מטריצה P כך שהמטריצה $D = P^{-1}AP$ היא אלכסונית. לכן:

$D^T = D = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1}$, כלומר גם A^T לכסינה.

שאלה 6 (10 נקודות). בשאלה זו יש **לנמק** כל תשובה, אחרת היא **לא** תתקבל. אם צריך, כתוב בשני צדי הדף.

(א) הוכח שאם A היא מטריצה סימטרית ממשית שכל ערך עצמי שלה הוא 1 או 1- , אז A אורתוגונלית.

הוכחה.

המטריצה A היא סימטרית ממשית ולכן היא דומה למטריצה אלכסונית D שכל איבר באלכסון שלה הוא 1 או 1-. מזה יוצא שהמטריצה A^2 דומה למטריצה D^2 השווה כמובן ל- I. מכיוון ש- $A^T = A$, והמטריצה היחידה שדומה ל- I היא I עצמה, יוצא ש- $AA^T=A^TA = I$, כלומר A היא מטריצה אורתוגונלית.

(ב) יהי V מרחב וקטורי ממשי בעל מימד סופי, ויהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי.

הוכח ש- $\mathrm{Im}T^2 = \mathrm{Im}T$ אם ורק אם $Ker T \cap \mathrm{Im}T = \{0\}$.

הוכחה.

בגלל השוויונות $\dim(Ker T) + \dim(\mathrm{Im}T) = \dim(Ker T^2) + \dim(\mathrm{Im}T^2) = \dim(V)$ ובגלל ההכלות $\mathrm{Im}T^2 \subseteq \mathrm{Im}T$, $Ker T \subseteq Ker T^2$ אפשר לראות שהתנאי $\mathrm{Im}T^2 = \mathrm{Im}T$ שקול לתנאי $Ker T^2 = Ker T$.

מספיק איפוא להוכיח ש- $Ker T^2 = Ker T$ אם ורק אם $Ker T \cap \mathrm{Im}T = \{0\}$.

כיוון אחד: נניח שמתקיים $Ker T^2 = Ker T$, ויהי v וקטור ב- $Ker T \cap \mathrm{Im}T$. אז $Tv=0$ וקיים u כך ש- $v=Tu$.

מכאן $T^2u=0$ כלומר u נמצא ב- $Ker T^2$ ולכן הוא נמצא גם ב- $Ker T$, כלומר $v=Tu=0$. מכאן $Ker T \cap \mathrm{Im}T = \{0\}$.

כיוון שני: נניח שמתקיים $Ker T \cap \mathrm{Im}T = \{0\}$, ויהי u וקטור ב- $Ker T^2$. אז $T^2u=0$ כלומר $T(Tu)=0$. יוצא איפוא ש- Tu נמצא גם ב- $\mathrm{Im}T$ וגם ב- $Ker T$, ולכן $Tu=0$ כלומר u נמצא ב- $Ker T$. מכאן $Ker T^2 = Ker T$.